RECURRÈNCIES

Josep M. Brunat i Blay

1. Introducció

Representarem per $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos i per $\mathbb{N}$ el conjunt dels nombres naturals. Depenent de les circumstàncies o de la conveniència, es considera que el primer nombre natural és 0 o 1. En les discussions teòriques nosaltres suposarem que és 1, però en alguns exemples i problemes serà convenient prendre el 0 com a primer natural.
Una *successió* a de nombres complexos és una aplicació

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

La imatge d'un natural n es diu el terme n-èsim de la successió i es representa per a_n. La tradició fa que sovint una successió no es representi per una sola lletra com a, sinó per formes com (a_n) o a_n. Això té un cert grau d'ambigüitat però, tot i així, seguirem la tradició i posarem a_n per denotar tant la successió a com el terme n-èsim de la successió a. El context aclarirà si parlem del terme o de la successió.
Essencialment, doncs, una successió fa correspondre a cada natural n un nombre complex, el que ocupa la posició n a la successió.

La forma més natural de definir una successió és indicar quin a_n correspon a cada n mitjançant una fórmula *explícita*. Per exemple,

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

defineix una successió. Per calcular un terme només hem de substituir n pel valor corresponent, per exemple,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_5 = 21.$$

Però hi ha altres formes de definir una successió. Una de les més importants és mitjançant una *recurrència*. Aquest mètode consisteix en donar uns quants termes inicials, diguem k, i després indicar com es calcula cada terme a partir dels k anteriors. Els termes inicials donats es diuen *condicions inicials* i la fórmula per calcular un terme a partir dels k anteriors es diu *recurrència* d'*ordre* k. Per exemple,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

defineix una successió mitjançant les condicions inicials $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ i la recurrència $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, que és d'ordre 2. Els dos primers termes estan donats i la recurrència permet calcular cada terme a partir dels dos anteriors:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 = 5, \quad a_4 = a_3 + 2a_2 = 5 + 6 = 11, \quad a_5 = a_4 + 2a_3 = 11 + 10 = 21, \quad \text{etc.}$$

Noteu que, amb aquesta definició, per calcular a_n hem de calcular prèviament tots els termes anteriors, cosa que no passa amb una definició explícita.

El problema que tractarem és el següent: definida una successió de forma recurrent, trobar la seva forma explícita. Per exemple, la successió a_n definida per

$$(1) \qquad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

és la successió

$$(2) \qquad a_n = \frac{2}{3}\,2^n + \frac{1}{3}(-1)^n.$$

Demostració: Les condicions inicials i la recurrència defineixen una única successió. Per tant, si la successió (2) compleix les condicions inicials i la recurrència de (1), aleshores és la successió definida a (1). Substituint a (2) n per 1 i 2 obtenim $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, que són les condicions inicials. Per $n \geq 3$ tenim,

$$\begin{aligned} a_{n-1} + 2a_{n-2} &= \frac{2}{3}\,2^{n-1} + \frac{1}{3}(-1)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{3}\,2^{n-2} + \frac{1}{3}(-1)^{n-2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) 2^n + \left(\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}\right)(-1)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3}\,2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = a_n \end{aligned}$$

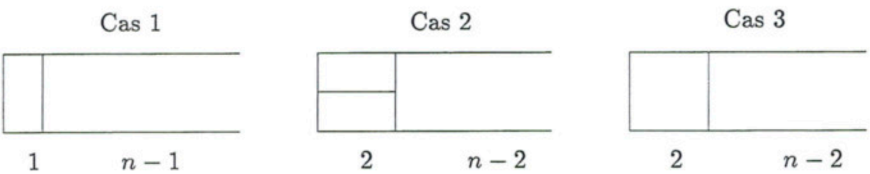
i es compleix la recurrència.

El raonament anterior no és gaire satisfactori: tenim la recurrència, per art de màgia ens traiem una fórmula de la màniga i anunciem que és la solució. I, en efecte, ho és: ho hem demostrat. Des del punt de vista lògic, l'argument és impecable. Ara bé, ens agradaria saber com s'ha arribat a la fórmula en qüestió. D'això tractarem.

Un dels aspectes essencials de la *combinatòria* és comptar, i les recurrències són una eina important per a comptar. Molts dels problemes que plantejarem són problemes en què cal comptar coses depenent de un cert natural n i la forma de fer–ho és plantejar una recurrència. Posem-ne un exemple.

Exemple 1. Calculeu de quantes formes diferents es pot enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i 2×2 i no es poden trencar rajoles.

Solució: Sigui a_n el nombre demanat. Podem començar a enrajolar de tres formes diferents:



En el primer cas, queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-1)$, que es pot fer de a_{n-1} formes diferents. En els altres dos casos queda per enrajolar un passadís $2 \times (n-2)$, que es pot fer de a_{n-2} formes diferents. Per tant,

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Clarament $a_1 = 1$ i $a_2 = 3$. Ja hem vist abans que aquestes condicions inicials i la recurrència defineixen la successió

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n. \quad \square$$

En aquesta mena de problemes combinatoris, els a_n sempre són enters. Tanmateix, per a la discussió teòrica convé admetre que els nombres que apareixen puguin ésser complexos. A més, les recurrències són útils en altres contextos, com trobar fórmules per sumes en les que el nombre de sumands depèn de n, en problemes econòmics, en problemes de complexitat algorísmica i d'altres. En aquests casos no sempre els termes de les successions són enters i les tècniques que veurem s'hi poden aplicar igualment.

En la part teòrica, primer estudiarem les *recurrències lineals homogènies amb coeficients constants,* que són les de la forma

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1),$$

per certes constants $c_1, \ldots, c_k$, és a dir, aquelles en què cada terme s'obté dels k anteriors multiplicant-los per constants i sumant. El mot *homogènies* prové del zero del segon terme de la igualtat. Primer veurem amb detall els casos $k=1$ i $k=2$. Un exemple important amb $k=2$ és el dels *nombres de Fibonacci,* que comentarem breument. Després considerarem el cas general, amb k arbitrari, però sense detalls, només per deixar constància que el mètode es pot generalitzar. Finalment, veurem com, per certes funcions $f(n)$, es poden resoldre recurrències de la forma

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1),$$

és a dir, no homogènies. L'apartat titulat *Altres mètodes* és menys sistemàtic. Recull tècniques i observacions diverses, que poden ésser útils per recurrències lineals i no lineals. Acabarem la part teòrica amb comentaris bibliogràfics.

Després hi ha els els enunciats dels problemes. Advertim que no estan ordenats per grau de dificultat. Tampoc pel mètode a emprar, entre d'altres motius perquè n'hi ha que admeten mètodes de solució diferents. No sempre el mètode sistemàtic és el més curt, així que paga la pena pensar una mica abans de posar–se a calcular. Hi ha també indicacions i solucions d'uns quants problemes.

Cal dir que hi ha tota una teoria, la de les *funcions generadores,* que combina àlgebra i combinatòria i que s'aplica particularment bé a les recurrències. Als llibres que citem a la bibliografia s'estudia aquesta teoria amb més o menys aprofundiment segons els casos. Aquí, però, no la tractem i tots els problemes que proposem es poden resoldre sense el recurs d'aquesta teoria.

2. Recurrències lineals homogènies d'ordre 1 i 2

Les recurrències lineals d'ordre 1 s'anomenen *progressions geomètriques.* Són successions en què cada terme a_n s'obté de l'anterior multiplicant–lo per una constant:

$$a_n - c_1 a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2).$$

La solució és molt fàcil.

Teorema 1 *Sigui* $c_1 \neq 0$. *Les successions* a_n *que compleixen*

$$a_n - c_1 a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

són les de la forma

$$a_n = A c_1^n$$

on A *és una constant determinada per* a_1.

Demostració: Comprovem primer que, per tota constant A, la successió $a_n = Ac_1^n$ compleix la recurrència:

$$a_n - c_1 a_{n-1} = Ac_1^n - c_1 A c_1^{n-1} = Ac_1^n - Ac_1^n = 0.$$

Sigui ara a_n tal que compleixi la recurrència. Si trobem A de forma que $a_1 = Ac_1$, és a dir, prenent $A = a_1/c_1$ (noteu que $c_1 \neq 0$), aleshores la successió $b_n = Ac_1^n$ compleix la recurrència i té el mateix valor inicial que a_n. Per tant,

$$a_n = b_n = Ac_1^n. \quad \square$$

El polinomi $x - c_1$ s'anomena *polinomi característic* de la recurrència $a_n - c_1 a_{n-1} = 0$. El conjunt de successions a_n que compleixen una recurrència formen la *solució general* de la recurrència. El teorema anterior diu que la solució general de la recurrència $a_n - c_1 a_{n-1} = 0$ està formada per les successions de la forma

$$a_n = Ac_1^n,$$

amb A constant. Si coneixem el valor inicial a_1, podem determinar A i obtenir la fórmula explícita de la successió.

Exemple 2. $a_1 = 2, \quad a_n - 3a_{n-1} = 0 \ (n \geq 2)$.
Solució: La solució general de la recurrència és $a_n = A \cdot 3^n$. Ara, $2 = a_1 = 3A$ implica $A = 2/3$. Per tant,

$$a_n = \frac{2}{3} 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}. \quad \square$$

De fet, en l'argument anterior l'important és que A queda determinat coneixent un terme; que aquest terme sigui el primer a_1 o qualsevol altre és menys important.

El mètode per resoldre les d'ordre 2 està suggerit per l'anterior.

Teorema 2 *Siguin c_1, c_2 constants amb $c_2 \neq 0$. Les successions a_n tals que*

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$$

són les següents,
(i) *si $x^2 - c_1 x - c_2 = (x-\alpha)^2$, són les de la forma*

$$a_n = (A + Bn)\alpha^n$$

on A i B estan unívocament determinats per a_1 i a_2.
(ii) *si $x^2 - c_1 x - c_2 = (x-\alpha)(x-\beta)$ amb $\alpha \neq \beta$, són les de la forma*

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

on A i B estan unívocament determinats per a_1 i a_2.

Demostració: (i) Comprovem que totes les successions $a'_n = A\alpha^n$ amb A constant compleixen la recurrència:

$$\begin{aligned} a'_n - c_1 a'_{n-1} - c_2 a'_{n-2} &= A\alpha^n - c_1 A\alpha^{n-1} - c_2 A\alpha^{n-2} \\ &= A\alpha^{n-2}(\alpha^2 - c_1\alpha - c_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comprovem que les successions $a''_n = Bn\alpha^n$ amb B constant també la compleixen:

$$\begin{aligned} a''_n - c_1 a''_{n-1} - c_2 a''_{n-2} &= Bn\alpha^n - c_1 B(n-1)\alpha^{n-1} - c_2 B(n-2)\alpha^{n-2} \\ &= Bn\alpha^{n-2}\left(\alpha^2 - c_1\alpha - c_2\right) + B\alpha^{n-2}(c_1\alpha + 2c_2) \\ &= B\alpha^{n-2}(c_1\alpha + 2c_2). \end{aligned}$$

Ara, $x^2 - c_1 x - c_2 = (x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha + \alpha^2$ implica $c_1 = 2\alpha$ i $c_2 = -\alpha^2$. Per tant,

$$c_1\alpha + 2c_2 = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 = 0.$$

Aleshores les successions $a_n = a'_n + a''_n = (A + Bn)\alpha^n$ compleixen la recurrència.
Recíprocament, si a_n compleix la recurrència, podem determinar A i B per tal que la successió $b_n = (A + Bn)\alpha^n$ tingui valors inicials a_1 i a_2. Aleshores,

$$a_1 = (A + B)\alpha, \quad a_2 = (A + 2B)\alpha^2,$$

donen

$$A = \frac{2\alpha a_1 - a_2}{\alpha^2}, \quad B = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}.$$

(Noteu que $c_2 \neq 0$ comporta $\alpha \neq 0$). Per aquests valors de A i B, resulta

$$a_n = b_n = (A + Bn)\alpha^n.$$

(ii) De la mateixa forma que abans, es comprova que les successions de la forma $a'_n = A\alpha^n$ i $a''_n = B\beta^n$ compleixen la recurrència i, per tant, les successions $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ també la satisfan.

Recíprocament, si a_n compleix la recurrència, podem trobar A i B de forma que

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

En efecte, imposant les condicions inicials

$$a_1 = A\alpha + B\beta, \quad a_2 = A\alpha^2 + B\beta^2,$$

obtenim:

$$A = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad B = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}$$

(Notem que $c_2 \neq 0$ implica que $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$. A més, $\alpha - \beta \neq 0$ per hipòtesi.) □

El polinomi $x^2 - c_1x - c_2$ es diu el *polinomi característic* de la recurrència $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = 0$. Com hem vist, les arrels d'aquest polinomi donen la solució general de la recurrència.

Exemple 3. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3)$.

Solució: El polinomi característic és $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Així, la solució cercada és de la forma

$$a_n = (A + Bn)2^n.$$

Imposant les condicions inicials

$$1 = a_1 = (A + B)2, \quad 3 = a_2 = (A + 2B)2^2,$$

obtenim $A = B = 1/4$. Per tant,

$$a_n = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}n)2^n = (1 + n)2^{n-2}. \quad \square$$

Exemple 4. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 3)$.

Solució: El polinomi característic és $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. La solució general de la recurrència és

$$a_n = A2^n + B(-1)^n.$$

Per $n = 1$ i $n = 2$, tenim,

$$1 = 2A - B, \quad 3 = 4A + B$$

d'on $A = 2/3$ i $B = 1/3$. Per tant,

$$a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right). \quad \square$$

En l'enunciat del teorema i en els exemples, els coeficients A i B s'acaben determinant mitjançant a_1 i a_2. Com es pot veure, però, es poden emprar dos termes qualssevol.

Si les dues arrels del polinomi característic no són reals, aleshores la solució general es pot expressar d'una altra forma. Sigui $x^2 - c_1x - c_2 = (x-\alpha)(x-\beta)$ amb α i β complexos conjugats. Si r i ψ són el mòdul i l'argument de α, tenim,

$$\alpha = r(\cos\psi + i\sin\psi), \quad \beta = r(\cos\psi - i\sin\psi).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} A\alpha^n + B\beta^n &= Ar^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) + Br^n(\cos n\psi - i\sin n\psi) \\ &= r^n\left[(A+B)\cos n\psi + (A-B)i\sin n\psi\right] \\ &= r^n(C\cos n\psi + D\sin n\psi), \end{aligned}$$

on

$$C = A + B, \quad D = (A-B)i \quad \text{o, equivalentment,} \quad A = (C - Di)/2, \quad B = (C + Di)/2.$$

Veiem que determinar A i B és equivalent a determinar C i D. Per tant, en el cas d'arrels complexes, la solució general de la recurrència està formada per les successions

$$a_n = r^n(C\cos n\psi + D\sin n\psi).$$

Exemple 5. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ $(n \geq 2)$.

Solució: El polinomi característic és $x^2 - 2x + 2$ que té arrels $\alpha = 1 + i$ i $\beta = 1 - i$. El mòdul de α és $r = \sqrt{2}$ i l'argument $\psi = \pi/4$. Per tant,

$$a_n = (\sqrt{2})^n (C \cos n\frac{\pi}{4} + D \sin n\frac{\pi}{4}).$$

Imposant les condicions inicials,

$$1 = a_0 = C, \quad a_1 = 2 = \sqrt{2}\left(C\frac{\sqrt{2}}{2} + D\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que dóna $C = D = 1$. En definitiva,

$$a_n = (\sqrt{2})^n (\cos n\frac{\pi}{4} + \sin n\frac{\pi}{4}). \quad \square$$

Notem que a_0 i a_1 són enters i que $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per $n \geq 2$. Això comporta que tots els valors a_n són enters, cosa no gens evident a la vista de la fórmula anterior.

3. Els nombres de Fibonacci

Leonardo Fibonacci (que vol dir fill de Bonacci), també conegut com a Leonardo de Pisa (1175–1240, dates aproximades) és un dels grans noms de la ciència. Entre d'altres llibres, fou autor del *Liber Abacci,* que és una obra cabdal en la difusió dels numerals aràbics i dels mètodes per fer les quatre operacions bàsiques tal com les fem avui.
Fibonacci estudià un dels primers problemes d'anàlisi de poblacions. El problema és el següent.

Problema de Fibonacci. Suposem que una parella de conills acabats de néixer pot tenir una parella de fills al final del segon mes i, a partir d'aquí, una parella cada mes. Començant amb una parella de conills acabats de néixer, i suposant que no hi ha defuncions, quantes parelles de conills hi haurà després de n mesos?

Solució: Sigui a_n el nombre de conills al final del mes n. Al final del primer mes només tenim la parella original, o sigui $a_1 = 1$. Al final del segon mes tenim la parella original i la parella de fills, és a dir, $a_2 = 2$. Al final del mes n hi haurà tots el que hi havia el mes anterior, a_{n-1}, més els nou-nats, que seran tants com parelles hi havia el mes $n-2$, és a dir, a_{n-2}. Per tant,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Resolem la recurrència pel mètode de l'apartat anterior. El polinomi característic que resulta és $x^2 - x - 1$ que té arrels

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Per tant,

$$a_n = A \cdot \phi^n + B \cdot \bar{\phi}^n.$$

Per calcular A i B cal imposar les condicions inicials. En lloc de donar els valors $n = 1, 2$, ho arreglarem per donar els valors $n = 0, 1$. Només cal definir a_0 de forma que es compleixi $a_0 + a_1 = a_2$, és a dir, $a_0 = 1$. Imposant $a_0 = a_1 = 1$, resulta,

$$1 = A + B, \quad 1 = A \cdot \phi + B \cdot \bar{\phi},$$

d'on

$$A = \frac{\phi}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{-\bar{\phi}}{\sqrt{5}}$$

i

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{\phi}^{n+1}. \quad \square$$

La recurrència $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ es diu *recurrència de Fibonacci,* i els nombres

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \bar{\phi}^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

s'anomenen *nombres de Fibonacci,* els quals formen la solució de la recurrència de Fibonacci amb condicions inicials $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$. Veiem, doncs, que el problema de Fibonacci té solució $a_n = f_{n+1}$. Noteu que, tot i l'aspecte de la fórmula anterior, els f_n són enters, com es dedueix de la definició recurrent. Els nombres f_n tenen multitud de curioses propietats, algunes de les quals són els problemes del 16 al 22.

El nombre ϕ és la *raó àuria* o *divina proporció* dels clàssics, i ha estat emprada en moltes construccions i pintures, vegeu [Gh].

4. Generalització

El cas de les recurrències lineals d'ordre 1 i 2 només són casos particulars de les d'ordre k, que també es saben resoldre. Enunciarem el teorema general, però no el demostrarem. Comproveu, però, que els teoremes 1 i 2 són casos particulars del següent.

Teorema 3 *Siguin $c_1, \dots, c_k$ constants, $c_k \neq 0$ i suposem que*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = (x - \alpha_1)^{s_1+1} \cdots (x - \alpha_t)^{s_t+1}.$$

Les successions a_n tals que

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1),$$

són les de la forma

$$a_n = (A_{1,0} + A_{1,1} n + \cdots + A_{1,s_1} n^{s_1}) \alpha_1^n + \cdots + (A_{t,0} + A_{t,1} n + \cdots + A_{t,s_t} n^{s_t}) \alpha_t^n,$$

on els coeficients $A_{i,j}$ estan unívocament determinats per $a_1, \dots, a_k$.

El *polinomi característic* és el polinomi $x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k$. Per cada arrel α_i de multiplicitat $s_i + 1$ del polinomi característic, hi ha un sumand a la solució general de la recurrència format pel producte d'un polinomi en n de grau s_i per α_i^n.

Exemple 6. $a_1 = -6$, $a_2 = 22$, $a_3 = -38$, $a_n - a_{n-1} - 8a_{n-2} + 12a_{n-3} = 0 \quad (n \geq 4)$.
Solució: El polinomi característic és $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x+3)(x-2)^2$. Per tant,

$$a_n = A(-3)^n + (B + Cn)2^n.$$

Imposem les condicions inicials:

$$-6 = -3A + 2(B + C), \quad 22 = 9A + 4(B + 2C), \quad -38 = -27A + 8(B + 3C).$$

Aquest sistema té solució $A = 2$, $B = -1$ i $C = 1$. Llavors,

$$a_n = 2(-3)^n + (-1 + n)2^n. \quad \square$$

5. Recurrències no homogènies

Considerem ara recurrències lineals amb coeficients constants *no homogènies*, que són les del tipus

$$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1), \tag{3}$$

on $c_1, \ldots, c_k$ són constants i $f(n) \neq 0$ una funció. La *recurrència homogènia associada* a (3) és la que s'obté canviant $f(n)$ per 0.

Veurem que, per a certes funcions $f(n)$, podem trobar la solució general d'aquesta recurrència. Suposem que sabem trobar una successió concreta p_n que compleixi la recurrència (3), és a dir, que compleixi

$$(4) \qquad p_n - c_1 p_{n-1} - \cdots - c_k p_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k+1).$$

D'una tal successió se'n diu una *solució particular*. D'altra banda, d'acord amb el que ja hem vist, sabem quina és la solució general de la recurrència homogènia associada a (3),

$$(5) \qquad h_n - c_1 h_{n-1} - \cdots - c_k h_{n-k} = 0 \quad (n \geq k+1).$$

Les successions h_n tenen la forma descrita al teorema 3, és a dir, són sumes de productes de polinomis en n per potències de les arrels del polinomi característic. Els coeficients dels polinomis són certs paràmetres i per cada assignació de valors a aquests paràmetres s'obté una solució de la recurrència.

Sumant les igualtats (4) i (5), obtenim que les successions $a_n = h_n + p_n$ compleixen (3). Si les condicions inicials són donades, es poden determinar els paràmetres que apareixen a l'expressió de h_n i obtenir la fórmula explícita per a_n. El problema, doncs, és com obtenir una solució particular p_n.

El mètode següent funciona bé quan $f(n)$ és de la forma *suma de polinomis en n per nombres elevats a n*, és a dir, quan és de la forma de les solucions de recurrències lineals homogènies. Heus ací uns quants exemples on posem $f(n)$, mostrem que és de la forma de les solucions d'una recurrència homogènia, i posem el polinomi característic $q(x)$ de la recurrència.

$f(n)$	n	$2^n - 1$	n^2	$n^2 2^n$
forma	$(A+Bn)1^n$	$A2^n + B1^n$	$(A+Bn+Cn^2)1^n$	$(A+Bn+Cn^2)2^n$
$q(x)$	$(x-1)^2$	$(x-2)(x-1)$	$(x-1)^3$	$(x-2)^3$

El mètode per trobar una solució particular p_n és el següent:

a) Calcular el polinomi característic $p(x)$ de la recurrència homogènia associada;

b) trobar el polinomi característic $q(x)$ d'una recurrència homogènia tal que $f(n)$ pertanyi a la seva solució general;

c) escriure la solució general de la recurrència homogènia de polinomi característic $p(x)q(x)$;

d) de la solució general obtinguda a c), suprimir els sumands que corresponen a $p(x)$;

e) el resultat obtingut és un conjunt de successions entre les quals cal cercar una solució particular. Cal determinar els coeficients imposant la recurrència.

Exemple 7. $a_0 = 49/4$, $a_1 = 1/20$, $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 2^n - 1 \quad (n \geq 2)$.

Solució: L'homogènia associada és $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, que té polinomi característic $p(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ i solució general

$$h_n = A \cdot (-3)^n + B \cdot 2^n.$$

Busquem ara una solució particular pel mètode explicat.

a) $p(x) = (x+3)(x-2)$.

b) De $2^n - 1 = 2^n - 1 \cdot 1^n$ deduïm que $q(x) = (x-2)(x-1)$, de forma que $p(x)q(x) = (x+3)(x-2)^2(x-1)$.

c) El polinomi $p(x)q(x)$ és el característic d'una recurrència homogènia de solució general

$$b_n = A(-3)^n + B\,2^n + Cn2^n + D\,1^n.$$

d) La part corresponent a $p(x)$ està formada pels sumands amb coeficients A i B, els quals eliminem.

e) Per tant, cerquem una solució particular de la forma $p_n = Cn2^n + D$. Imposant que es compleixi la recurrència original, obtenim

$$\begin{aligned}
&Cn2^n + D + C(n-1)2^{n-1} + D - 6(C(n-2)2^{n-2} + D) = 2^n - 1,\\
&2^{n-2}\left[4Cn + 2C(n-1) - 6C(n-2)\right] - 4D = 2^n - 1,\\
&2^{n-2}10\,C - 4\,D = 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Prenent $C = 4/10 = 2/5$ i $D = 1/4$ es compleix la recurrència. Una solució particular és, doncs,

$$p_n = \frac{2}{5}\,n\,2^n + \frac{1}{4}.$$

La nostra solució cal buscar-la entre les de la forma

$$a_n = h_n + p_n = A \cdot (-3)^n + B\,2^n + \frac{2}{5}n2^n + \frac{1}{4}.$$

Imposant els valors inicials,

$$\frac{49}{4} = a_0 = A + B + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = a_1 = -3A + 2B + \frac{4}{5} + \frac{1}{4},$$

obtenim $A = 5$ i $B = 7$. Per tant,

$$a_n = 5 \cdot (-3)^n + 7 \cdot 2^n + \frac{2}{5} n\, 2^n + \frac{1}{4}. \quad \square$$

Recurrències no homogènies apareixen en problemes en què es tracta de calcular sumes de n sumands. Per exemple, les ben conegudes fórmules de la suma dels primers n naturals o de n termes d'una progressió geomètrica es poden veure d'aquesta manera, encara que els càlculs resulten més pesats que emprant els enginyosos mètodes tradicionals d'obtenir les fórmules.

Exemple 8. Calcular $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Solució: Posem $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Tenim $a_n - a_{n-1} = n$ i $a_1 = 1$. La solució general de l'homogènia és $h_n = A$. Cerquem una solució particular. Amb la notació anterior, $p(x) = (x-1)$, $q(x) = (x-1)^2$, i $p(x)q(x) = (x-1)^3$. A aquest polinomi correspon una solució general $B + Cn + Dn^2$, de la qual hem d'eliminar el terme constant B, que correspon a $p(x)$. Cerquem una solució particular del tipus $p_n = Cn + Dn^2$. Ara,

$$n = p_n - p_{n-1} = Cn + Dn^2 - C(n-1) - D(n-1)^2 = 2Dn + (C - D),$$

dóna $C = D = 1/2$. Per tant,

$$a_n = h_n + p_n = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Com que $a_1 = 1$, resulta $A = 0$. En definitiva,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

Exemple 9. Calcular $1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ per $r \neq 1$. (El cas $r = 1$ és l'exemple 8.)

Solució: Posem $a_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$. Tenim $a_n - a_{n-1} = r^n$. La solució general de la homogènia és $h_n = A$. Amb les notacions anteriors, $p(x) = (x-1)$, $q(x) = (x-r)$, i $p(x)q(x) = (x-1)(x-r)$. A aquest polinomi correspon una solució general $B + Cr^n$, de la qual eliminem la constant B, que correspon a $p(x)$. Cerquem una solució particular de la forma $p_n = Cr^n$. Tenim, $r^n = Cr^n - Cr^{n-1}$, d'on $r = Cr - C$ i $C = r/(r-1)$ (recordeu que $r \neq 1$.) Aleshores,

$$a_n = A + \frac{r^{n+1}}{r-1}.$$

Per $n = 1$, tenim $1 + r = A + r^2/(r-1)$, el que dóna $A = 1/(1-r)$. En definitiva,

$$a_n = \frac{1}{1-r} + \frac{r}{r-1}r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \quad \square$$

6. Altres mètodes

Els mètodes que descriurem ara són menys sistemàtics, però sovint útils i es poden aplicar a recurrències lineals i no lineals.

Mètode d'inducció

El *mètode d'inducció* consisteix en calcular uns quants termes i, a la vista dels nombres que surten, conjecturar la solució. Després s'aplica inducció per establir que la conjectura és correcta.

Exemple 10. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad (n \geq 3)$.
Solució: Calculem els primers termes:

n	1	2	3	4	5
a_n	3	5	9	17	33

Això suggereix $a_n = 2^n + 1$. Per $n = 1, 2$, els valors coincideixen. Si $a_m = 2^m + 1$ per tot $m < n$, aleshores

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1,$$

i la fórmula val per n. $\square$

Mètode d'expansió

De vegades, a l'aplicar repetidament la recurrència podem obtenir la fórmula explícita.

Exemple 11. Una *progressió aritmètico-geomètrica* és una successió en què cada terme s'obté del precedent multiplicant-lo per una constant r (anomenada *raó*) i sumant després al resultat una constant d (anomenada *diferència*.) Si $r = 1$, la successió es diu *progressió aritmètica* i, si $d = 0$, *progressió geomètrica*. Trobeu el valor del terme enèsim a_n en funció de la raó, la diferència i a_1. Escriviu les fórmules per als casos de progressions aritmètiques i geomètriques.

Solució: La definició indica que la successió compleix la recurrència $a_n = ra_{n-1} + d$. (Noteu que és lineal d'ordre 1, no homogènia, i que la podríem resoldre pels mètodes ja explicats.) Iterant,

$$
\begin{aligned}
a_n &= ra_{n-1} + d = r(ra_{n-2} + d) + d = r^2 a_{n-2} + (1+r)d \\
&= r^2(ra_{n-3} + d) + (1+r)d = r^3 a_{n-3} + (1 + r + r^2)d \\
&= \dots \\
&= r^{n-1}a_1 + (1 + r + \cdots + r^{n-2})d \\
&= \begin{cases} r^{n-1}a_1 + \dfrac{1 - r^{n-1}}{1-r}d & \text{si} \;\; r \neq 1, \\ a_1 + (n-1)d & \text{si} \;\; r = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Per les progressions aritmètiques ($r = 1$) tenim

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Per les geomètriques ($d = 0$) obtenim

$$a_n = a_1 r^{n-1}. \quad \square$$

Canvis de variable

El següent exemple il·lustra el que entenem pel mètode de *canvi de variable.*

Exemple 12. Trobeu una successió a_n de nombres reals positius tals que

$$a_0 = 2 \quad \text{i} \quad a_n^2 - 5a_{n-1}^2 = 0.$$

Solució: Posem $b_n = a_n^2$. Aleshores $b_0 = 4$ i $b_n - 5b_{n-1} = 0$. Aquesta recurrència és lineal i la sabem resoldre: $b_n = A \cdot 5^n$. Per $n = 0$ obtenim $4 = A$. Així, $b_n = 4 \cdot 5^n$. Per tant

$$a_n = 2(\sqrt{5})^n. \quad \square$$

El canvi $b_n = a_n^2$ ha permès transformar la recurrència inicial, que no és lineal, en una recurrència lineal de primer ordre.

Recurrències dobles

Una *successió doble* és una aplicació

$$a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

La imatge d'una parella (n, m) es denota $a_{n,m}$. La forma *explícita* de definir una successió doble és donar una fórmula que permeti calcular directament $a_{n,m}$ a partir de n i m. Per exemple,

$$a_{n,m} = \binom{n}{m}. \tag{5}$$

Una forma alternativa és donar unes successions de *condicions inicials* i una *recurrència doble* que permeti calcular $a_{n,m}$ a partir dels valors $a_{r,s}$ anteriors. Què vol dir *anteriors*? Hi ha diferents formes d'ordenar parelles de naturals, i cada una d'elles proporciona un concepte d'anterior. El més freqüent, però, és el següent: Les parelles *anteriors* a la parella (n, m) són les parelles (r, s) tals que $r < n$ i les parelles (r, s) tals que $r = n$ i $s < m$. Per exemple, la successió de nombres binomials (5) es pot definir mitjançant les condicions inicials

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,1} = n \quad (n \geq 1),$$

i la recurrència doble

$$a_{n,m} = a_{n-1,m-1} + a_{n-1,m} \quad (n \geq 2, m \geq 2).$$

En efecte, els nombres binomials compleixen les condicions inicials

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n,$$

i la recurrència

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}. \tag{6}$$

Els problemes 33 i 34 tracten de recurrències dobles relacionades amb els nombres binomials.

7. Bibliografia

[An] I. Anderson, *Introducción a la combinatoria,* Editorial Vicens–Vives, Barcelona, 1993.

[Bi] N.L. Biggs, *Matematicas discretas,* Editorial Vicens–Vives, Barcelona, 1994.

[Br] J.M. Brunat, *Combinatòria i teoria de grafs,* 3a edició, Edicions UPC, Barcelona, 1997.

[Gh] M.C. Ghyca, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes,* Editorial Poseidón, Barcelona, 1983.

[Go] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations,* Dover Publications, Inc. New York, 1986.

[Gr] R.P. Grimaldi, *Matemáticas discreta y combinatoria,* 3ª edición, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

El llibre de Ghyca [Gh] explica múltiples propietats del nombre d'or i la seva utilització en obres d'art (pintura, arquitectura) i la seva aparició en formes de la naturalesa.
Dels altres llibres, l'únic dedicat exclusivament a les recurrències, (també anomenades equacions en diferències,) és el de S. Goldberg [Go]. Hi podeu trobar molts exemples d'aplicació de les recurrències a l'economia, psicologia i sociologia.
Una discussió detallada de les recurrències lineals amb coeficients constants des d'un punt de vista no molt llunyà al que hem seguit aquí la podeu trobar a [Br]. Per exemple, hi ha la prova del teorema 3 i el motiu pel qual el mètode explicat per trobar una solució particular funciona bé. En aquest llibre hi ha, però, molt pocs exemples i cap problema.
La major part dels problemes proposats a la secció següent provenen del llibre de Grimaldi [Gr], en el qual hi ha molts exemples detallats i molts problemes proposats. També hem usat els llibres d'Anderson [An] i Biggs [Bi], que són de dimensions més reduïdes que el de Grimaldi. En tots tres trobareu notícia sobre la tècnica de les funcions generadores per resoldre recurrències, de la qual aquí no hem comentat res.

8. Problemes

RE1.–Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que la porten al nivell $n-1$ i tres que són millors, en el sentit que la porten directament al nivell $n-2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n. Trobeu a_n sabent que $a_1=2$.

RE2.–Un sistema permet d'emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de senyals diferents que es poden emetre en n segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.

RE3.–S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el 1990 són v_0 i les del 1991 són v_1, calculeu les vendes de l'any $1990+n$.

RE4.–Una bandera s'ha de dissenyar amb n franges horitzontals d'igual mida. Cada franja pot ésser vermella, blava, verda o groga. Calculeu el nombre de banderes que es poden dissenyar en els següents casos:

a) No hi ha cap restricció sobre el color de cada franja.

b) Franges consecutives no poden tenir el mateix color.

c) Franges consecutives no poden tenir el mateix color i les franges dels extrems tampoc no poden ésser del mateix color.

RE5.–El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C i de n discs de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però al pal C. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu una relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resoleu-la.

RE6.–Considerem n rectes al pla en posició general (cada dues no paral·leles, cada tres no concurrents).

a) En quantes regions queda dividit el pla?

b) Quantes d'aquestes regions són no fitades?

RE7.–Considerem el conjunt de totes les paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2\}$.

a) Quantes tenen els dígits cadascun igual o superior a l'anterior?

b) Quantes paraules són cap-i-cua?

RE8.–Considerem el conjunt de totes les paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2\}$.

a) Quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals?

b) A quantes d'elles no hi ha ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius?

RE9.–Determineu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2, 3\}$ tals que no tenen cap 3 més a la dreta d'un 0.

RE10.–Trobeu el nombre de paraules de longitud n en l'alfabet $\{0, 1, 2, 3\}$ tals que tenen un nombre parell de zeros.

RE11.–En el pla hi ha dos punts pintats de groc i n punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.

a) Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin connectats és $n + 1$.

b) De quantes maneres diferents es poden dibuixar $n + 1$ segments de forma que tots els punts quedin connectats?

RE12.–Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pugem un o dos.

RE13.–Calculeu el nombre de subconjunts del conjunt $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

RE14.–Calculeu el nombre de formes d'enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i i no es poden trencar rajoles.

RE15.–Si $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, calculeu a_n.

En els set problemes següents es segueix la notació de la secció 3. Així, ϕ representa el nombre d'or, $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, i $\bar{\phi}$ el seu conjugat $\bar{\phi} = (1 - \sqrt{5})/2$. A més, f_n denota el n-èsim nombre de Fibonacci, $f_n = (\phi^n - \bar{\phi}^n)/\sqrt{5}$.

RE16.–Considereu la recurrència de Fibonacci $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ amb condicions inicials $a_0 = 1$ i $a_1 = \phi$. Demostreu que $a_n = \phi^n$.

RE17.–Calculeu $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

RE18.–Calculeu $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$.

RE19.–Calculeu $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n}$.

RE20.–Proveu que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k = f_{2n}$.

RE21.–a) Demostreu que ϕ i $\bar{\phi}$ són arrels del polinomi $x^3 - 2x - 1$.
b) Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}.$$

RE22.–a) Comproveu que les igualtats $x^2 + 1 = 2 + x$ i $(2 + x)^2 = 5x^2$ es compleixen per $x = \phi$ i per $x = \bar{\phi}$.
b) Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f_{2k+m} = 5^n f_{2n+m}.$$

RE23.–Una carpeta conté n fulls i en busquem un examinant-los consecutivament a partir del primer. Quina és la mitjana del nombre de fulls examinats?

RE24.–Voleu pintar els vèrtexs d'un polígon de n costats de forma que vèrtexs contigus tinguin colors diferents. Disposeu d'una caixa de k colors. De quantes maneres ho podeu fer?

RE25.–Segons es diu, el rei King Shirham de l'Índia volgué recompensar el seu Gran Visir Sissa Ben Dahir per inventar el joc dels escacs i li demanà quin premi volia. El Visir contestà: —dona'm un gra de blat pel primer quadrat, dos pel segon, quatre pel tercer, vuit pel quart, etc. fins acabar amb tots els quadrats del taulell. Cas de satisfer la demanda, quants grans de blat li hauria donat el rei al visir?.

RE26.–Calculeu, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.

RE27.–Calculeu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

RE28.–Sigui a un nombre real i n un enter positiu. Calculeu, $a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n$.

RE29.–Trobeu una fórmula explícita per la successió a_n definida per

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

RE30.–Calculeu a_n sabent que $a_1 = 12$, $a_2 = 60$ i

$$n(n+1)a_{n+2} - 5n(n+2)a_{n+1} + 4(n+1)(n+2)a_n = 0, \quad (n \geq 0).$$

RE31.–Resoleu per iteració la recurrència $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^n$.

RE32.–Teniu n objectes numerats de 1 a n i n llocs numerats de 1 a n per desar-los. Sigui d_n el nombre de formes de desar els objectes de forma que no n'hi hagi cap al seu lloc. Establiu una recurrència per d_n i calculeu d_n.

RE33.–Considereu la recurrència amb dos índexs

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{n,k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ o } k > n, \quad a_{n,k} = \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}) \text{ altrament.}$$

Calculeu uns quants $a_{n,k}$, conjectureu una fórmula, i proveu-la per inducció.

RE34.–Sigui $\lambda(n,k)$, on $n \geq 1$, el nombre de k-subconjunts de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ que no contenen dos enters consecutius.

a) Demostreu que $\lambda(n,k) = \lambda(n-1,k) + \lambda(n-2,k-1)$ per tot $n \geq 3$.

b) Proveu que per tot $n \geq 1$ i $0 \leq k \leq n$,

$$\lambda(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

c) Calculeu el nombre $\mu(n,k)$ de maneres d'escollir k persones d'entre n assegudes en una taula rodona sense agafar-ne dues de veïnes.

9. Mostra de solucions

Solució del problema RE4 c)

Sigui a_n el nombre demanat. Si $n = 1$, la primera i última franja coincideixen i tenen el mateix color. Per tant, $a_1 = 0$. A més, $a_2 = 4 \cdot 3 = 12$. Per $n \geq 3$, les banderes demanades amb n franges es classifiquen en:

(1) les que tenen les franges en les posicions 1 i $n-1$ de colors diferents, de les quals n'hi ha $2a_{n-1}$;

(2) les que tenen les franges en les posicions 1 i $n-1$ del mateix color, de les quals n'hi ha $3a_{n-2}$. Així, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Tenim, doncs,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 12, \quad a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3).$$

La solució és

$$a_n = 3^n + 3 \cdot (-1)^n.$$

Solució del problema RE8 b)

Sigui a_n el nombre de paraules de longitud n que no tenen dos uns ni dos dosos consecutius. Tenim $a_1 = 3$ i $a_2 = 7$. Per $n \geq 3$, aquestes paraules es classifiquen en:

(1) les que no tenen cap zero, de les quals n'hi ha 2;

(2) les que tenen el primer zero a la posició 1, de les quals n'hi ha a_{n-1};

(3) les que tenen el primer zero a la posició k, $2 \leq k \leq n-1$, de les quals n'hi ha $2a_{n-k}$;

(4) les que tenen el primer zero a l'última posició, de les quals n'hi ha 2.

Resulta, doncs, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + 2a_1 + 4$. Això implica $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$, el que dóna la recurrència $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Tenim, doncs,

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3),$$

que té solució

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right].$$

Solució del problema RE15

Amb el canvi $b_n = \log_2 a_n$ resulta

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

que defineix la successió de Fibonacci $b_n = f_n$. Per tant, la solució és $a_n = \exp_2 f_n$.

Solució del problema RE18

Si $a_n = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$, tenim $a_n - a_{n-1} = f_{2n-1}$. La solució general de la homogènia és $h_n = A$. Les propietats dels nombres de Fibonacci permet veure sense càlcul que f_{2n} és una solució particular. Aleshores, $a_n = A + f_{2n}$. Posant $n = 1$ obtenim $1 = a_1 = A + f_2 = A + 1$, d'on $A = 0$. Així, $a_n = f_{2n}$.

Solució del problema RE22

a) En tots dos casos, simplificant s'obté l'equació $x^2 - x - 1 = 0$, que té solucions ϕ i $\bar{\phi}$.

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}f_{2k+m} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{\phi^{2k+m}-\bar{\phi}^{2k+m}}{\sqrt{5}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\phi^2)^k\cdot\phi^m-\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\bar{\phi}^2)^k\cdot\bar{\phi}^m\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\phi^m(1+\phi^2)^{2n}-\bar{\phi}^m(1+\bar{\phi}^2)^{2n}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^m(2+\phi)^{2n}-\bar{\phi}^m(2+\bar{\phi})^{2n})\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^m(5\phi^2)^n-\bar{\phi}^m(5\bar{\phi}^2)^n)\\
&= 5^n\,\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{2n+m}-\bar{\phi}^{2n+m})\\
&= 5^n\,f_{2n+m}.
\end{aligned}$$

Solució del problema RE24

Sigui a_n el nombre de les coloracions considerades del polígon de n vèrtexs. Numerem els vèrtexs $1,2,\ldots,n$ en sentit directe. Tenim $a_3=k(k-1)(k-2)$. Calculem a_4. Coloracions tals que 1 i 3 tinguin diferent color n'hi ha $k(k-1)(k-2)^2$, que corresponen a k possibles colors pel vèrtex 2, $k-1$ pel 1, $k-2$ pel 3 i $k-2$ pel 4. Coloracions tals que els vèrtexs 1 i 3 tenen el mateix color n'hi ha $k(k-1)^2$, que corresponen a k colors possibles pel vèrtex 2, $k-1$ colors pels vèrtexs 1 i 3 i $k-1$ pel vèrtex 4. Per tant,

$$a_4=k(k-1)^2+k(k-1)(k-2)^2=k(k-1)(k^2-3k+3).$$

Per $n\geq 4$, les coloracions es classifiquen en:

(1) Aquelles en què els vèrtexs 1 i 3 tenen diferent color. D'aquestes n'hi ha tantes com coloracions del polígon que s'obté suprimint el vèrtex 2 i unint els vèrtexs 1 i 3, que són a_{n-1}, pel nombre de colors possibles del 2, que són $(k-2)$. Així, d'aquestes n'hi ha $(k-2)a_{n-1}$.

(2) Aquelles en què els vèrtexs 1 i 3 tenen el mateix color. D'aquestes n'hi ha tantes com coloracions del cicle que s'obté suprimint el vèrtex 2 i identificant els vèrtexs 1 i 3, multiplicat pel nombre possible de coloracions del 2, que són $(k-1)$. En tenim, doncs, $(k-1)a_{n-1}$.

En definitiva, obtenim

$$a_3=k(k-1)(k-2),\quad a_4=k(k-1)(k^2-3k+3),\quad a_n=(k-2)a_{n-1}+(k-1)a_{n-2}\quad (n\geq 3).$$

El polinomi característic té arrels $k-1$ i -1. La solució és

$$a_n = (k-1)^n + (k-1)(-1)^n.$$

Solució del problema RE30

Fent el canvi $a_n = nb_n$ i simplificant el factor $n(n+1)(n+2)$ queda

$$b_1 = 12, \quad b_2 = 30, \quad b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0 \quad (n \geq 1),$$

que té solució $b_n = 3 \cdot 2^{2n-1} + 6$. Aleshores,

$$a_n = 3\,n\,2^{2n-1} + 6n.$$

Solució del problema RE32

d_n és el nombre de permutacions de $1, 2, 3, \ldots n$ tals que cap nombre és a la seva posició. Aquestes permutacions s'anomenen *desarranjaments*. Tenim $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. Per $n \geq 3$, fixem un r, $1 \leq r \leq n-1$, i considerem els desarranjaments que tenen r a l'última posició. Aquests es classifiquen en dues classes segons la posició que ocupi n.

(1) Que n ocupi la posició r n'hi ha d_{n-2};

(2) Que n ocupi una posició diferent de la r n'hi ha d_{n-1}.

Com que r pot tenir $n-1$ valors, obtenim

$$d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \ (n \geq 3).$$

Fem el canvi $d_n = n!\,b_n$; s'obté

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1/2, \qquad n(b_n - b_{n-1}) = -(b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

Ara fem el canvi $c_n = b_n - b_{n-1}$, que dóna

$$c_2 = 1/2, \qquad c_n = -c_{n-1}/n \quad (n \geq 3).$$

Per expansió resulta $c_n = (-1)^n/n!$ per $n \geq 2$. Aleshores,

$$b_n = c_n + b_{n-1} = c_n + (c_{n-1} + b_{n-2}) = \cdots = c_n + c_{n-1} + \cdots + c_2 + b_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

D'aquí,

$$d_n = n!\,b_n = \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$